

## 1 Chladnutí homogenní koule

Uvažujme homogenní kouli o poloměru  $R$  s počátečním rozložením teploty  $T_0 = T_0(r)$ . Časový vývoj teploty je potom dán rovnicí:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T \quad (1)$$

$\alpha$  je látkovým parametrem. Uvažujme faktorizaci  $T = \mathcal{R}(r)\mathcal{T}(t)$ . Dosazením můžeme rozdělit rovnici na dvě nezávislé části, které musí být konstantní, aby byla splněna rovnost.

$$\frac{2}{r} \frac{\mathcal{R}'}{\mathcal{R}} + \frac{\mathcal{R}''}{\mathcal{R}} = \frac{1}{\alpha} \frac{\mathcal{T}'}{\mathcal{T}} = K = \text{konst.} \quad (2)$$

Nejprve vyřešíme pravou stranu:

$$\mathcal{T}' = \alpha K \mathcal{T} \quad (3)$$

$$\mathcal{T} = D e^{\alpha K t} \quad (4)$$

Levá strana dá diferenciální rovnici

$$\frac{2}{r} \mathcal{R} + \mathcal{R}'' - K \mathcal{R} = 0 \quad (5)$$

Hledejme řešení ve tvaru  $\mathcal{R} = \frac{C}{r} e^{ar}$ . Po dosazení dostaneme podmínku pro  $a$ :

$$K = a^2 \quad (6)$$

Dostáváme tedy obecný tvar řešení pro  $\mathcal{R}$ :

$$\mathcal{R} = \frac{C_1}{r} e^{\sqrt{K}r} + \frac{C_2}{r} e^{-\sqrt{K}r} \quad (7)$$

Potřebujeme, aby tento tvar umožňoval konečnou limitu pro  $r \rightarrow 0$ . Nulu nelze dosadit, proto  $\mathcal{R}$  v nule dodefinujeme limitou.

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{R} = \frac{C_1 + C_2}{r} + (C_1 - C_2)\sqrt{K} + O(r) \quad (8)$$

Aby limita nedivergovala, je potřeba u prvního členu položit  $C_1 + C_2 = 0$ . Dostáváme tvar:

$$\mathcal{R} = \frac{C_1}{r} e^{\sqrt{K}r} - \frac{C_1}{r} e^{-\sqrt{K}r} = \frac{C_1}{r} \left( e^{i\sqrt{-K}r} - e^{-i\sqrt{-K}r} \right) = \frac{C}{r} \sin(\sqrt{-K}r) \quad (9)$$

Nyní se nabízí tři typy počátečních podmínek.

## 1.1 Dirichletova podmínka

Můžeme uvažovat spojitý teplotní přechod s prostředím o nulové teplotě:

$$T(R, \forall t) = 0 \quad (10)$$

Dosazením tvaru (9) dostaneme

$$\frac{C}{r} \sin(\sqrt{-K}R) = 0 \quad (11)$$

$$\sqrt{-K}R = n\pi \quad (12)$$

$$K = -\frac{n^2\pi^2}{R^2} \quad (13)$$

Parametr  $n$  nabývá přirozených hodnot, i když podmínka povoluje i záporná celá čísla. Pokud ale dosadíme do  $\mathcal{R}$  a řešení sečteme, dostaneme nakonec sumaci pouze přes přirozené hodnoty.

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{r} \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) e^{-\alpha \frac{n^2\pi^2}{R^2}t} \quad (14)$$

S využitím relace

$$\int_0^{2R} \sin\left(\frac{m\pi r}{R}\right) \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) = R\delta_{mn} \quad (15)$$

můžeme najít koeficienty  $C_n$  pomocí počátečního rozložení teploty  $T_0$ :

$$C_n = \frac{1}{R} \int_0^{2R} T_0 r \sin\left(\frac{n\pi r}{R}\right) \quad (16)$$

## 1.2 Koeficient přestupu

Můžeme uvažovat prostředí, do něhož teplo přestupuje, přičemž tepelný tok je závislý na teplotním spádu. To nám dává podmínku

$$\frac{\partial T}{\partial r}(R, \forall t) = -kT \quad (17)$$

$$\mathcal{R}'\mathcal{T} = k\mathcal{R}\mathcal{T} \quad (18)$$

Dosazním (9) do (18) dostaneme:

$$\frac{\sqrt{-K} \cos \sqrt{-K}R}{R} - \frac{\sin \sqrt{-K}R}{R^2} + \frac{k \sin \sqrt{-K}R}{R} = 0 \quad (19)$$

Označením  $A = \sqrt{-K}$  dostáváme rovnici:

$$A = \left( \frac{1}{R} - k \right) \tan(AR) \quad (20)$$

Pokud sečteme řešení pro všechna  $A$  splňující tuto podmínku, dostaneme konečný tvar:

$$T = \sum_A \frac{C_A}{r} \sin(Ar) e^{-\alpha A^2 t} \quad (21)$$

Vzhledem ke složitému charakteru koeficientů  $A$  nelze napsat jednoduchý tvar pro výpočet koeficientu  $C_A$  jako v předchozím případě. Můžeme ale některé z nich pevne určit, ostatní položit rovny nule a tím definovat počáteční rozložení teploty  $T_0$ .

### 1.3 Stefan-Boltzmannův zákon

Pokud uvažujeme kouli ve vakuu, lze použít model absolutně černého tělesa. Tepelný tok potom bude úměrný čtvrté mocnině okrajové teploty:

$$\frac{\partial T}{\partial r}(R, \forall t) = -\sigma T^4 \quad (22)$$

Řešení tohoto modelu už nelze najít metodou řad, ale je třeba problém řešit numericky.

### 1.4 Vizualizace

Příložený program Chladnuti.exe porovnává charakter tří modelů, přičemž všechny začínají na stejné počáteční teplotě a se stejným parametrem  $\alpha$ . Parametry příslušných okrajových podmínek jsou zvoleny nahodile, aby dobře vynikly rozdíly v chování. Horizontální rozpětí zobrazuje průřez koulí a vertikální směr značí teplotu. Dirichletova podmínka (modrá křivka) způsobí, že se koule ochladí velmi rychle na okrajovou teplotu. Model s koeficientem přestupu je znázorněn černě a se Stefan-Boltzmannovým zákonem červeně. U obou podmínek na okrajovou derivaci je vidět, že ve vyšších teplotách čtvrtá mocnina teploty (Stefan-Boltzmannův zákon) způsobuje rychlejší pokles, avšak časem se ochlazování zpomaluje a v určitých pozdějších časových horizontech je možné pokládat teplotu za konstantní v celém objemu tělesa.

## 2 Rovnice pohybu bubliny

Uvažujme bublinu rotačně symetrickou podle osy  $z$ . Blánu parametrizujeme polohovým vektorem

$$\begin{aligned}\vec{r} &= (R(\vartheta, t) \sin \vartheta \cos \varphi, R(\vartheta, t) \sin \vartheta \sin \varphi, R(\vartheta, t) \cos \vartheta) \\ \varphi &\in (0, 2\pi) \quad \vartheta \in (0, \pi)\end{aligned}\tag{23}$$

Velikost normálové síly působící vlivem povrchového napětí lze stanovit Young-Laplaceovou rovnicí:

$$F = -\gamma \operatorname{div} \vec{n} \, dS\tag{24}$$

Vektor  $\vec{n}$  má směr vnější normály a je i směrem působící síly. Je však ještě třeba započítat rozdíl tlaků uvnitř a vně bubliny:

$$dm \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = (-\gamma \operatorname{div} \vec{n} + \Delta p) \, dS \vec{n}\tag{25}$$

Po zavedení plošné hustoty kapaliny, kterou je bublina tvořena, a použití stavové rovnice dostáváme:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{\sigma} \left( -\gamma \operatorname{div} \vec{n} + p_0 \left( \frac{V_0}{V} - 1 \right) \right) \vec{n}\tag{26}$$

Parametr  $p_0$  určuje atmosferický tlak vně bubliny a parametr  $V_0$  klidový objem bubliny. Vektor  $\vec{n}$  vypočteme jako normálu k ploše, přičemž použijeme označení  $R' = \frac{\partial R}{\partial \vartheta}$ :

$$\vec{n} = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}}{\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right\|} \quad (27)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} = (R' \sin \vartheta \cos \varphi + R \cos \vartheta \cos \varphi, R' \sin \vartheta \sin \varphi + R \cos \vartheta \sin \varphi, R' \cos \vartheta - R \sin \vartheta) \quad (28)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = (-R \sin \vartheta \sin \varphi, R \sin \vartheta \cos \varphi, 0) \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = & (R \sin \vartheta \cos \varphi (R \sin \vartheta - R' \cos \vartheta), R \sin \vartheta \sin \varphi (R \sin \vartheta - \\ & R' \cos \vartheta), R \sin \vartheta \cos \varphi (R' \sin \vartheta \cos \varphi + R \cos \vartheta \cos \varphi + \\ & R \sin \vartheta \sin \varphi (R' \sin \vartheta \sin \varphi + R \cos \vartheta \sin \varphi)) \end{aligned} \quad (30)$$

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right\| = R \sin \vartheta \sqrt{R'^2 + R^2} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \vec{n} = & \left( \cos \varphi \frac{R \sin \vartheta - R' \cos \vartheta}{\sqrt{R'^2 + R^2}}, \sin \varphi \frac{R \sin \vartheta - R' \cos \vartheta}{\sqrt{R'^2 + R^2}}, \right. \\ & \left. \frac{R' \sin \vartheta + R \cos \vartheta}{\sqrt{R'^2 + R^2}} \right) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{n} = & \frac{2}{\sqrt{R'^2 + R^2}} + \frac{1}{R \sin \vartheta} \left( -\frac{R' \cos \vartheta}{\sqrt{R'^2 + R^2}} + \right. \\ & \left. \sin \vartheta \left( -\frac{R''}{\sqrt{R'^2 + R^2}} + \frac{RR' + R'R''}{\sqrt{R'^2 + R^2}^3} \right) \right) \end{aligned} \quad (33)$$

Dále je třeba spočítat objem bubliny:

$$V = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\vartheta, t)} r^3 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta = \frac{2}{3} \pi \int_0^\pi R^3 \sin \vartheta d\vartheta \quad (34)$$

Takto získáme rovnici pro časový vývoj polohy blány bubliny. Protože se symetrická podle osy  $z$ , lze polohový vektor  $\vec{r}$  modelovat v rovinném řezu.

Potom získáme vektorovou rovnici o dvou souřadnicích:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{\sigma \gamma} \left[ -\frac{2}{\sqrt{R'^2 + R^2}} - \frac{1}{R \sin \vartheta} \left( -\frac{R' \cos \vartheta}{\sqrt{R'^2 + R^2}} + \right. \right. \\ \left. \left. \sin \vartheta \left( -\frac{R''}{\sqrt{R'^2 + R^2}} + \frac{RR' + R'R''}{\sqrt{R'^2 + R^2}^3} \right) \right) + p_0 \gamma \left( \frac{V_0}{\frac{2}{3}\pi \int_0^\pi R^3 \sin \vartheta d\vartheta} - 1 \right) \right] \\ \left( \frac{R \sin \vartheta - R' \cos \vartheta}{\sqrt{R'^2 + R^2}}, \frac{R' \sin \vartheta + R \cos \vartheta}{\sqrt{R'^2 + R^2}} \right) \end{aligned} \quad (35)$$

Pomocí této pohybové rovnice pro element blány můžeme numericky simulovat pohyb bubliny. Vektor  $\vec{r}$  máme zadán pomocí  $R$  v (23), takže po dosazení získáváme parciální diferenciální rovnici pro  $R(\vartheta, t)$ .

### 3 Vedení tepla v částečně izolované desce

Uvažujme dvourozměrný problém čtvercové desky, která je až na své okraje tepelně izolovaná. Rovnice šíření tepla má tvar

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T \quad (36)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_{\partial \Omega} = -kT \quad (37)$$

Okrajová podmínka říká, že tepelný tok na okraji je úměrný teplotnímu spádu. V blízkosti desky se navíc pohybuje tepelný zářič o intenzitě  $I$ . Tepelný tok na hranici desky tak vzroste o hodnotu

$$\Delta \Phi = \frac{I}{r} \cos \theta \quad (38)$$

kde  $r$  je vzdálenost zdroje a místa na hranici. Úhel  $\theta$  svírá spojnice těchto bodů a směr kolmý na hranici desky, tím se škáluje účinná plocha, na kterou dopadá tepelné záření.

Uvnitř desky se rychlost poklesu teploty aproximuje přibližným tvarem Laplaceova operátoru teploty:

$$\Delta T \approx \frac{T(x+h, y) + T(x, y+h) + T(x-h, y) + T(x, y-h) - 4T(x, y)}{h^2} \quad (39)$$

Okrajová podmínka má tvar

$$T(\partial\Omega) = (1 - k)T(\partial\Omega + \vec{h}) \quad (40)$$

kde  $\vec{h}$  značí kolmý posun od okraje dovnitř desky. Tepelná bilance na okraji je zajištěna střídavým uplatňováním této podmínky a pronikáním tepelného toku od zdroje dovnitř desky pomocí difuze vlivem rovnice (36).

Příložený program Stena.exe tyto přibližné rovnice numericky počítá v reálném čase a zobrazuje teplotu ve stupních šedé (0-200 K) na dvourozměrné čtvercové desce. Deska je rozdělena na  $60 \times 60$  dílů a s tepelným zdrojem (červenou tečkou) lze pomocí myši pohybovat a kolečkem měnit jeho intenzitu. Program dynamicky ukazuje, jak se deska zahřívá zářením od zdroje a ochlazuje kontaktem s okolím. Desku lze zahřívát pouze z boku, nejedná se o třírozměrný model.